第10講　命題と証明

1 [1]　実数 a に対して，集合 A，B，C および全体集合 U が次のように定義されている．

$$A=\{2,\ -a+5,\ a^2-2a+1,\ a^2+a-6\},\ B=\{4,\ a^2-6a+8,\ a^2-6a+9\}$$
$$C=\{a^2-a-2,\ a^3-8a^2+19a-12\},\quad U=A\cup B\cup C$$

いま，$A\cap B\cap C=\{0\}$ のとき，以下のものを求めよ．

(1)　a の値　　(2)　集合 $A\cap B$ の要素　　(3)　集合 $(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(A\cup C)$ の要素

[2]　α が無理数，a，b が有理数であるとき，$a+b\alpha=0$ ならば $a=b=0$ であることを証明せよ．

【Point Pickup】

[1]　集合について

2つ以上の集合については，「　　　　　」などを利用し，包含関係や共通部分などを明らかにすること．

[2]　無理数とは

有理数とは「　　　　」で表される数.

実数のうち，有理数でない数を無理数という．代表例は「　　　」と「　　　」.

＜ Note ＞

2 [1]　次の各命題について，真であれば証明し，偽であれば反例を1つあげよ．

(1)　実数 a について，$\sqrt{a^2}$ と a は等しい

(2)　実数 x について，$|2x-1|=x$　ならば　$x=1$　である．

[2]　実数 x，y に対し，次の □ に当てはまる最も適切なものを

①必要十分条件　②必要条件　③十分条件　④必要条件でも十分条件でもない

から1つ選べ．

「$x=1$ でないかまたは $y=1$」は $(x-1)(y-1)=0$ であるための □

【Point Pickup】

[1]　真偽の判定

偽でなければ真．つまり「　　　　」がなければ真である．

「　　　　」とは，仮定や前提条件を満たすものの中で，結論が否定される例．

[2]　必要条件と十分条件

p（であること）は q であるための

十分条件　……　$p \Rightarrow q$　が真　　　　必要条件　……　$q \Rightarrow p$　が真

＜ Note ＞

3　実数 x, y に関する以下の命題で正しいものは説明し，誤っているものは反例をあげよ．

(1)　x と y が共に無理数であることは，$x+y$ が無理数であることの十分条件である．

(2)　x と y のいずれかが無理数であることは，$x+y$ が無理数であることの必要条件である．

(3)　x が有理数で y が無理数であることは，$x+y$ が無理数であることの十分条件である．

【Point Pickup】

閉じている，閉じていない

a, b がともに有理数のとき，$a+b$, $a-b$, $a\times b$, $\dfrac{a}{b}(b\neq0)$ は「有理数　　　　　　」

a, b がともに無理数のとき，$a+b$, $a-b$, $a\times b$, $\dfrac{a}{b}(b\neq0)$ は「無理数　　　　　　」

対偶および背理法

命題　$p \Rightarrow q$　について　(p：仮定　　q：結論)

・命題の真偽は，$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ (「　　　　　」) の真偽と一致する．

・p のもとに $\overline{q}$ を仮定すると，「　　　　　」する → 命題は真 (「　　　　　　」)

いずれも「　　　　　を否定」すると見通しが明るくなる場合に有効.

< Note >

第10講　命題と証明

[1]　整数を要素とする2つの集合

$A=\{-3,\ 2,\ a^2-9a+25,\ 2a+3\}$，$B=\{-2,\ a^2-4a-10,\ a^2-5a+1,\ a+6,\ 16\}$

において，$A\cap B=\{2,\ 7\}$ とするとき，$\overline{A}\cap B=\{$ **アイ** , **ウエ** , **オカ** $\}$ である．

[2]　次の各命題の真偽を調べよ．真ならば①，偽ならば②を選べ．

(1)　a が自然数ならば $\sqrt{a}$ は無理数である．

(2)　$a>0$ であるとき，a が無理数ならば $\sqrt{a}$ も無理数である．

[3]　自然数 n は，整数 m を用いて $n=3m$，$3m+1$，$3m+2$ の3通りに分類される．このことを用いて，n^2 を3で割ると1余ることは，n を3で割ると1余るための何条件かを以下の①～④から選べ．

①　必要十分条件

②　必要条件であるが，十分条件ではない

③　十分条件であるが，必要条件ではない

④　必要条件でも十分条件でもない

＜ Note ＞

第10講　命題と証明

1 ［1］ 実数 a に対して，集合 A，B，C および全体集合 U が次のように定義されている．

$A=\{2,\ -a+5,\ a^2-2a+1,\ a^2+a-6\}$，$B=\{4,\ a^2-6a+8,\ a^2-6a+9\}$

$C=\{a^2-a-2,\ a^3-8a^2+19a-12\}$，　$U=A\cup B\cup C$

いま，$A\cap B\cap C=\{0\}$ のとき，以下のものを求めよ．

⑴ a の値　　⑵ 集合 $A\cap B$ の要素　　⑶ 集合 $(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(A\cup C)$ の要素

⑴ $A\cap B\cap C=\{0\}$ より，集合 B の要素の1つに0が存在する．

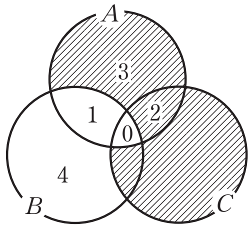
$a^2-6a+8=0$ のとき　$a=2,\ 4$

$a=2$ のとき　$A=\{2,\ 3,\ 1,\ 0\}$，$C=\{0,\ 2\}$ より適する

$a=4$ のとき　$A=\{2,\ 1,\ 9,\ 14\}$ より不適

$a^2-6a+9=0$ のとき　$a=3$　　このとき　$A=\{2,\ 2,\ 4,\ 6\}$ より不適

以上より　$\boldsymbol{a=2}$



⑵ ⑴より　$A=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$，$B=\{0,\ 1,\ 4\}$，$C=\{0,\ 2\}$

よって　$\boldsymbol{A\cap B=\{0,\ 1\}}$

⑶ 右図より

$(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(A\cup C)=(\overline{A\cap B})\cap(A\cup C)=\boldsymbol{\{2,\ 3\}}$

1 ［2］ α が無理数，a，b が有理数であるとき，$a+b\alpha=0$ ならば $a=b=0$ であることを証明せよ．

$a+b\alpha=0$　より　$b\alpha=-a$

$b=0$ のとき　$0=-a$　つまり　$a=0$

$b\neq0$ のとき　$\alpha=-\dfrac{a}{b}$

a，b は有理数より $-\dfrac{a}{b}$ も有理数．

よって，左辺は無理数，右辺は有理数より矛盾．

以上より　$a+b\alpha=0$ ならば $a=b=0$

2 [1]　次の各命題について，真であれば証明し，偽であれば反例を1つあげよ．

(1)　実数 a について，$\sqrt{a^2}$ と a は等しい

(2)　実数 x について，$|2x-1|=x$　ならば　$x=1$　である．

(1)　**偽（反例 $a=-1$）**

(2)　$|2x-1|=x$ について

$x \geqq \frac{1}{2}$ のとき　$2x-1=x$　より　$x=1$　　これは $x \geqq \frac{1}{2}$ を満たす

$x < \frac{1}{2}$ のとき　$-2x+1=x$　より　$x=\frac{1}{3}$　これは $x < \frac{1}{2}$ を満たす

よって　$|2x-1|=x \iff x=\frac{1}{3},\ 1$　　　したがって命題は**偽**　$\left(\textbf{反例}\quad \boldsymbol{x=\frac{1}{3}}\right)$

2 [2]　実数 x，y に対し，次の［　　］に当てはまる最も適切なものを

①必要十分条件　②必要条件　③十分条件　④必要条件でも十分条件でもない

から1つ選べ．

「$x=1$ でないかまたは $y=1$」は $(x-1)(y-1)=0$ であるための［　　］

「$x=1$ でないかまたは $y=1$」$\Longrightarrow (x-1)(y-1)=0$　は偽（反例　$x=2$，$y=2$）

$(x-1)(y-1)=0 \Longrightarrow$「$x=1$ でないかまたは $y=1$」は偽（反例　$x=1$，$y=2$）

よって「$x=1$ でないかまたは $y=1$」は $(x-1)(y-1)=0$ であるための　必要条件でも十分条件でもない（④）

3　実数 x，y に関する以下の命題で正しいものは説明し，誤っているものは反例をあげよ．

(1)　x と y が共に無理数であることは，$x+y$ が無理数であることの十分条件である．

(2)　x と y のいずれかが無理数であることは，$x+y$ が無理数であることの必要条件である．

(3)　x が有理数で y が無理数であることは，$x+y$ が無理数であることの十分条件である．

(1)「x と y が共に無理数である $\Rightarrow$ $x+y$ が無理数である」は偽（反例 $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$）

よって, x と y が共に無理数であることは, $x+y$ が無理数であることの十分条件ではなく，命題は誤り．

(2)「$x+y$ が無理数である $\Rightarrow$ x と y のいずれかが無理数である」の対偶は

「x と y がともに有理数 $\Rightarrow$ $x+y$ は有理数」　これは明らかに真．

よって，x と y のいずれかが無理数であることは，$x+y$ が無理数であることの必要条件であり，命題は正しい．

(3)「x が有理数で y が無理数である $\Rightarrow$ $x+y$ が無理数」について

$x+y=k$（k は有理数）とすると，　$y=k-x$

x が有理数，y が無理数のとき，

左辺は無理数であり，右辺は有理数．よって仮定に矛盾する．

したがって，x が有理数で y が無理数である $\Longrightarrow$ $x+y$ が無理数　は真，

つまり　x が有理数で y が無理数であることは，$x+y$ が無理数であることの十分条件であり，命題は正しい．

第 10 講　命題と証明

[1]　整数を要素とする 2 つの集合

$A=\{-3,\ 2,\ a^2-9a+25,\ 2a+3\}$，$B=\{-2,\ a^2-4a-10,\ a^2-5a+1,\ a+6,\ 16\}$

において，$A\cap B=\{2,\ 7\}$ とするとき，$\overline{A}\cap B=\{$ アイ ，ウエ ，オカ $\}$ である．

[2]　次の各命題の真偽を調べよ．真ならば①，偽ならば②を選べ．

(1)　a が自然数ならば $\sqrt{a}$ は無理数である．

(2)　$a>0$ であるとき，a が無理数ならば $\sqrt{a}$ も無理数である．

[3]　自然数 n は，整数 m を用いて $n=3m$，$3m+1$，$3m+2$ の 3 通りに分類される．このことを用いて，n^2 を 3 で割ると 1 余ることは，n を 3 で割ると 1 余るための何条件かを以下の①～④から選べ．

①　必要十分条件

②　必要条件であるが，十分条件ではない

③　十分条件であるが，必要条件ではない

④　必要条件でも十分条件でもない

解答例

[1]　$A\cap B=\{2,\ 7\}$ より　$2a+3=7$　または　$a^2-9a+25=7$　よって　$a=2,\ 3,\ 6$

$a=2,\ 3$ のときは　集合 B の要素に 7 が存在せず不適．

$a=6$ のとき　$A=\{-3,\ 2,\ 7,\ 15\}$，$B=\{-2,\ 2,\ 7,\ 12,\ 16\}$ より　$A\cap B=\{2,\ 7\}$を満たす．

よって　$\overline{A}\cap B=\{\mathbf{-2,\ 12,\ 16}\}$

[2]　(1)　$a=4$ のとき　$\sqrt{a}=\sqrt{4}=2$ より有理数. よって反例 $a=4$ が存在し,偽である（②）

(2)　命題の対偶は，$\sqrt{a}$ が有理数ならば a も有理数．これを示す．

$\sqrt{a}=\dfrac{n}{m}$　（m，n は正の整数）とおくと　$a=\left(\dfrac{n}{m}\right)^2=\dfrac{n^2}{m^2}$　よって a は有理数.

したがって，対偶が真より元の命題も真（①）

[3]　命題「n^2 を 3 で割ると 1 余る $\Longrightarrow$ n を 3 で割ると 1 余る」の対偶は

「n が 3 の倍数，または 3 で割ると 2 余るとき，n^2 は 3 の倍数，または 3 で割ると 2 余る」

$n=3m$ のとき　$n^2=(3m)^2=3\cdot 3m^2$　　よって n^2 は 3 の倍数

$n=3m+2$ のとき　$n^2=(3m+2)^2=3(3m^2+4m+1)+1$　n^2 は 3 で割ると 1 余る

よって反例が存在し，偽

また，$n=3m+1$ のとき　$n^2=(3m+1)^2=3(3m^2+2m)+1$ より　n^2 は 3 で割ると 1 余る

よって，命題「n を 3 で割ると 1 余る $\Longrightarrow$ n^2 を 3 で割ると 1 余る」は真

したがって，必要条件であるが十分条件ではない　(②)